

MATHEMATISCH CENTRUM,

Afd. Toegepaste Wiskunde.

Rapport TW no. 13.

Datum : April 1951.

Auteur: J. Kemperman.

Titel : Het stromingsbeeld bij wateronttrekking
uit een zandpakket gelegen tussen twee
moeilijk doorlaatbare lagen.

Het stromingsbeeld bij wateronttrekking uit een
zandpakket gelegen tussen twee moeilijk door-
laatbare lagen.

We beschouwen een zandmassa, welke zich in horizontale richting oneindig ver uitstrekt en welke door twee homogene horizontale kleilagen in een drietal étages wordt verdeeld. We veronderstellen, dat alle poriën (beneden een boven de kleilagen gelegen phreatisch oppervlak) met zoet water zijn gevuld. Verder nemen we aan, dat in de begintoestand geen stroming optreedt d.w.z. de zoetwaterpotentiaal van het grondwater is overal nul.

We brengen nu in een punt P van het door de beide kleilagen begrensde zandpakket een put aan, waaruit $Q \text{ m}^3$ water per dag wordt opgepompt. Het resulterende stromingsbeeld zal in dit rapport worden bestudeerd in de veronderstelling, dat het zandpakket homogeen is en dat de beschouwde wateronttrekking geen merkbare invloed heeft op de potentiaal buiten het zandpakket. De laatste voorwaarde is zeker vervuld, wanneer beide kleilagen ondoorlaatbaar zijn, en is goede benadering vervuld, wanneer beide kleilagen moeilijk doorlaatbaar zijn en het zand beneden de onderste (resp. boven de bovenste) kleilaag een voldoende grote dikte of doorlaatbaarheid heeft.

De volgende constanten zijn nu van belang.

1. De dikte D (in meters) van het zandpakket.
2. De doorlaatbaarheid k (in m/dag) van het zandpakket.
3. De weerstand c_1 (in dagen) van de bovenste kleilaag.
4. De weerstand c_2 (in dagen) van de onderste kleilaag.
5. De afstand ζ (in meters) van de put P tot de onderste kleilaag.

Voor een numerieke illustratie zullen deze constanten als volgt worden gekozen:

$$D = 120; k = 30; c_1 = 3500 \text{ (resp. } c_1 = \infty); c_2 = \infty; \zeta = 90.$$

In dit geval zijn

$$(1) \quad G = \frac{D}{kc_1} \quad \text{en} \quad \tau = \frac{D}{kc_2}$$

kleine getallen; we zullen aannemen dat zulks steeds het geval is.

Zij (x, y, z) een Cartesisch coördinatenstelsel, waarvoor het vlak $z = 0$ samenvalt met de bovenzijde van de onderste kleilaag, en waarvoor de opwaarts gerichte z -as door de put P gaat. Het stromingsbeeld is dan rotatie-symmetrisch t.o.v. de z -as. In Appendix I wordt

bewezen, dat bij een bemaling van $Q \text{ m}^3$ per dag de zoetwater-potentiaal wordt gegeven door de reeks

$$(2) \quad \varphi = - \frac{Q}{2k\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\mu_n \xi - \theta_n) \cos(\mu_n z - \theta_n) K_0(\mu_n r) .$$

Hierin is $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $K_0(x)$ de z.g. Engelse functie van de orde nul. Verder doorloopt $\lambda_n = \mu_n D$ ($0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$) de niet-negatieve wortels van de transcendente vergelijking

$$(3) \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\sigma + \tau}{\lambda - \frac{\sigma \tau}{\lambda}} ,$$

wanneer σ en τ door (1) worden gegeven. Tenslotte is

$$(4) \quad \theta_n = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{kc_2 \mu_n} \quad (0 \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}),$$

en

$$(5) \quad \frac{1}{A_n} = \int_0^D \cos^2(\mu_n z - \theta_n) dz .$$

Indien beide kleilagen ondoorlaatbaar zijn, dan moet men in het rechterlid van (2) de eerste term vervangen door

$$\frac{Q}{2k\pi D} \log r .$$

In dit geval hebben we $\mu_n = \frac{n\pi}{D}$, $\theta_n = 0$ en $A_n = \frac{2}{D}$ en volgt dus

$$(6) \quad \varphi = - \frac{Q}{2k\pi D} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi \xi}{D}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{D}\right) K_0\left(\frac{n\pi r}{D}\right) - \log r \right] ,$$

welk resultaat reeds door M. MUSKAT (1937, blz. 267) werd gevonden. In het bijzondere geval $c_2 = \infty$ hebben we $\theta_n = 0$ en wordt de potentiaal dus gegeven door een reeks van de vorm

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\mu_n z) K_0(\mu_n r) .$$

Reeds G.J. DE GLEE (1930, blz. 59) bewees deze formule, evenwel zonder de coëfficiënten C_n expliciet aan te geven.

Gebruik makend van het feit, dat σ en τ klein zijn, kan men bewijzen (zie Appendix II), dat in goede benadering geldt

$$\mu_0 \sim \sqrt{\frac{1}{kc_1 D} + \frac{1}{kc_2 D}} = \frac{1}{D} \sqrt{\sigma + \tau}$$

en

$$\mu_n \sim \frac{n\pi}{D} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) .$$

Verder geldt voor $x > 0$ (zie G.N. WATSON, 1941, blz. 207)

$$(7) \quad K_0(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[1 - \frac{\gamma}{8x} \right] \quad (0 \leq \gamma \leq 1)$$

en voor niet te kleine waarden r overweegt dus in (2) de eerste term. Wegens

$$A_0 \cos(\mu_0 \zeta - \theta_0) \cos(\mu_0 z - \theta_0) \sim A_0 \sim \frac{1}{D}$$

($0 \leq \zeta \leq D; 0 \leq z \leq D$) wordt dus voor niet te kleine waarden r de potentiaal in goede benadering gegeven door

$$(8) \quad \varphi = - \frac{Q}{2k\pi D} K_0 \left(r \sqrt{\frac{1}{kc_1 D} + \frac{1}{kc_2 D}} \right).$$

In het geval $c_1 = c_2 = \infty$ moet deze formule natuurlijk vervangen worden door

$$(9) \quad \varphi = \frac{Q}{2k\pi D} \log r.$$

Zoals bekend volgen de beide laatste formules ook uit een vereenvoudigde één-dimensionale voorstelling van het stromingsbeeld (waarbij de verticale snelheids-componenten worden verwaarloosd).

Voor grote waarden r wordt de potentiaal $\varphi(r, z)$ met voldoende nauwkeurigheid door (8) gegeven. Voor kleine waarden r mag evenwel de verticale component van de stroomsnelheid niet meer worden verwaarloosd, en is dus de benaderingsformule (8) ongeldig. Voor het onderzoek van het stromingsveld in de buurt van de put P zou men dus gebruik moeten maken van de exacte formule (2). De hierin voorkomende reeks convergeert wegens (7) weliswaar voor elke positieve waarde r , doch is slechts langzaam convergent, wanneer r klein is. Voor numerieke berekeningen is formule (2) dus ongeschikt, wanneer r klein is en zelfs onbruikbaar als $r = 0$. Daarom is het gewenst formules te geven voor de potentiaal $\varphi(r, z)$, die voor kleine waarden r beter bruikbaar zijn dan formule (2).

De berekening van de potentiaal $\varphi(r, z)$ voor kleine waarden r is vrij eenvoudig in het geval, dat zowel c_1 als c_2 één der waarden 0 of ∞ aanneemt. In dit geval kan men nl. het veld van de put P tussen de kleilagen vervangen door het veld in een oneindig homogeen zand van een reeks putten en bronnen in de punten $z = 2nD \pm \zeta$ ($n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) van de z -as. Hiervan uitgaande, wordt in appendix III bewezen, dat voor $r \leq D$ de berekening van $\varphi(r, z)$ kan geschieden aan de hand van de volgende formules.

Stel

$$(10) \quad R = \frac{r}{4D} \quad ; \quad \alpha = \frac{\zeta - z}{4D} \quad ; \quad \beta = \frac{\zeta + z}{4D}$$

en

$$\left. \begin{array}{ll} \delta_i = +1 & \text{als } c_i = +\infty \\ = -1 & \text{" } c_i = 0 \end{array} \right\} \quad i = (1, 2).$$

Dan is

$$(11) \quad \varphi(r, z) = - \frac{Q}{16k\pi D} \left[A(R, \alpha) + \delta_1 A(R, \frac{1}{2} - \beta) + \delta_2 A(R, \beta) + \delta_1 \delta_2 A(R, \frac{1}{2} + \alpha) \right],$$

met

$$(12) \quad A(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} - B(\xi, y) - B(\xi, -y).$$

De hierin voorkomende functie $B(\xi, y)$ wordt berekend volgens

$$(13) \quad B(\xi, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m} \Psi^{(2m)}(y),$$

waarin

$$\Psi(y) = \frac{d}{dy} \ln \Gamma(y+1) = \frac{\Gamma'(y+1)}{\Gamma(y+1)}.$$

Van de functie $\Psi(y)$ en zijn afgeleiden $\Psi^{(h)}(y)$ ($h = 1, 2, \dots$) staan tabellen ter beschikking (zie JAHNKE-EMDE blz. 16-19).

In het geval $c_1 = c_2 = \infty$ kan (11) vereenvoudigd worden (zie voetnoot bij Appendix III) tot

$$(14) \quad \varphi(r, z) = - \frac{Q}{8k\pi D} \left[A(2R, 2\alpha) + A(2R, -2\beta) + 4 \ln 2 \right],$$

welke formule voor $r=0$ wegens (10), (12) en (13) overgaat in

$$\begin{aligned} \varphi(0, z) = & - \frac{Q}{4k\pi} \left[\frac{1}{|\zeta - z|} + \frac{1}{|\zeta + z|} \right] + \frac{Q}{8k\pi D} \left[\Psi\left(\frac{\zeta - z}{2D}\right) + \right. \\ & \left. + \Psi\left(\frac{-\zeta + z}{2D}\right) + \Psi\left(\frac{\zeta + z}{2D}\right) + \left(\frac{-\zeta - z}{2D}\right) - 4 \ln 2 \right]. \end{aligned}$$

Indien $0 \leq z \leq \zeta$ en $c_1 = c_2 = \infty$, dan geldt dus voor de (verticale) snelheid $v = -k \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ in het punt $(0, z)$ van de bronas

$$(15) \quad \begin{aligned} v(0, z) = & \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{(\zeta - z)^2} - \frac{1}{(\zeta + z)^2} \right] + \frac{Q}{16\pi D^2} \left[\Psi'\left(\frac{\zeta - z}{2D}\right) \right. \\ & \left. - \Psi'\left(\frac{-\zeta + z}{2D}\right) - \Psi'\left(\frac{\zeta + z}{2D}\right) + \Psi'\left(\frac{-\zeta - z}{2D}\right) \right]. \end{aligned}$$

Voor $0 \leq z \leq \zeta \leq D$ hebben we

$$-1 < \frac{-\zeta-z}{2D} \leq \frac{-\zeta+z}{2D} \quad \text{en} \quad -1 < \frac{\zeta-z}{2D} \leq \frac{\zeta+z}{2D} ;$$

daar verder de functie $\Psi'(x)$ voor $x > -1$ monotoon afneemt volgt uit (14)

$$v(0, z) \geq \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{(\zeta-z)^2} - \frac{1}{(\zeta+z)^2} \right],$$

als $0 \leq z \leq \zeta$ en $c_1 = c_2 = \infty$. Hierin is het rechterlid gelijk aan de stroomsnelheid in het punt $(0, z)$ voor het geval $D = \infty$ (er is geen bovenlaag, doch alleen een ondoorlaatbare basis $z = 0$). In het algemeen kan men zeggen, dat bij het wegnemen van de bovenlaag de absolute waarde van de snelheid in een punt van de bronas wordt verkleind of vergroot al naar gelang dit punt beneden of boven de put ligt.

Merk op, dat de snelheid $v(0, z)$ een volumesnelheid is. Dit houdt in, dat door een oppervlakteëlement dO , in het punt $(0, z)$ loodrecht op de bronas, in opwaartse richting $v(0, z)dO$ kubieke meter water per dag stroomt. De ware stroomsnelheid van het door de poriën van het zand stromende water is ongeveer het drievoud van de volumesnelheid.

Als numerieke illustratie beschouwen we een homogeen zand met een put ter sterkte $Q = 250$ in het punt P van de z -as met coördinaat $\zeta = 90$. We onderscheiden de volgende drie gevallen.

- I. De put is aan weerszijden ingesloten door de horizontale ondoorlaatbare kleilagen $z = 0$ en $z = 120$ (resp. 90 meter onder en 30 meter boven de put).
- II. Onder de put bevindt zich een ondoorlaatbare basis $z=0$, doch er is geen bovenlaag ($D = \infty$).
- III. Boven de put bevindt zich de ondoorlaatbare kleilaag $z = 120$, doch er is geen basis.

Mits $0 \leq z \leq \zeta$, wordt de snelheid in de bronas in geval I gegeven door (15), in geval II door

$$v(0, z) = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{(\zeta-z)^2} - \frac{1}{(\zeta+z)^2} \right]$$

en in geval III door

$$v(0, z) = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{(\zeta-z)^2} + \frac{1}{(2D-\zeta-z)^2} \right]$$

met $D = 120$. In de volgende tabel is voor deze drie gevallen de (verticale) snelheid $v(0,z)$ weergegeven voor de punten $z = 0, 20, 40, 60, 80, 90$ van de bronas.

De volumesnelheid in de bronas (in m^3/dag).			
	I (2 lagen)	II (geen boven- laag)	III (geen basis)
$z = 0$	0	0	0,003340
20	0,003004	0,002416	0,005237
40	0,008075	0,006781	0,009602
60	0,023536	0,021221	0,024561
80	0,202369	0,198255	0,203003
90	∞	∞	∞

Zij s de verhouding van de volumesnelheid tot de ware snelheid (voor zand geldt ongeveer $s = 1/3$). Een waterdeeltje, dat zich op het tijdstip $t = 0$ in het punt z van de bronas bevindt, zal op het tijdstip

$$(16) \quad T(z) = s \int_z^{\xi} \frac{dz}{v(0,z)} \quad (\text{in dagen})$$

aankomen bij de put P (met coördinaat ξ). Voor $z = 20$ vindt men in geval I

$$T(20) = s \cdot 17,4 \text{ jaar} \sim 5,8 \text{ jaar},$$

(het interval $20 \leq z \leq 40$ wordt in 4,0 jaar doorlopen en het interval $40 \leq z \leq 90$ in 1,8 jaar). Analoog vindt men in geval III

$$T(20) = s \cdot 14,1 \text{ jaar} \sim 3,7 \text{ jaar}.$$

De potentiaal $\Phi(r,z)$ kan voor grote waarden r met behulp van (8) of (9) gemakkelijk worden berekend. Zoals we hebben laten zien is b.v. in het geval $c_1 = c_2 = \infty$ deze potentiaal ook voor kleine waarden r betrekkelijk gemakkelijk te berekenen. De vraag is nu, hoe men in het algemene geval (c_1 en c_2 willekeurig) het stromingsbeeld in de buurt van de bronas zou kunnen berekenen.

Voor het algemene geval wordt in appendix IV de volgende, voor elke waarde $r \geq 0$ geldende, formule voor de potentiaal bewezen.

$$(17) \quad \varphi(r, z) = \varphi_0(r, z) - \frac{Q}{2k\pi D} \int_0^\infty \frac{f(z, \zeta, \lambda)}{g(\lambda)} J_0\left(\lambda \frac{r}{D}\right) d\lambda.$$

Hierin is $J_0(x)$ de gewone Besselfunctie en is $\varphi_0(r, z)$ de potentiaal van het stromingsbeeld, dat ontstaat door c_1 door 0 en c_2 door ∞ te vervangen (terwijl Q , D en ζ onveranderd blijven). Verder hebben we

$$(18) \quad f(z, \zeta, \lambda) = \cosh \frac{\lambda \zeta}{D} \left[\lambda \cosh \frac{\lambda z}{D} + \tau \sinh \frac{\lambda z}{D} \right] \\ - \sinh \lambda \frac{D-\zeta}{D} \left[\tau \cosh \lambda \frac{D-z}{D} + \frac{\sigma \tau}{\lambda} \sinh \lambda \frac{D-z}{D} \right]$$

en

$$(19) \quad g(\lambda) = \cosh \lambda \left[(\sigma + \tau) \cosh \lambda + \left(\lambda + \frac{\sigma \tau}{\lambda} \right) \sinh \lambda \right].$$

Hierin is, evenals vroeger,

$$\sigma = \frac{D}{kc_1} \quad \text{en} \quad \tau = \frac{D}{kc_2}$$

en verder

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{en} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Teneinde ietwat hanteerbare formules te krijgen, beperken we ons verder tot het geval, dat de basislaag $z = 0$ ondoorlaatbaar is, d.w.z. tot het geval $c_2 = \infty$. Dan geldt $\tau = 0$ en wordt formule (17) wegens (18) en (19)

$$(20) \quad \varphi(r, z) = \varphi_0(r, z) - \frac{Q}{2k\pi D} \int_0^\infty \frac{\cosh \frac{\lambda \zeta}{D} \cosh \frac{\lambda z}{D} J_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right)}{\cosh \lambda \left[\sinh \lambda + \frac{\sigma}{\tau} \cosh \lambda \right]} d\lambda.$$

Hierin is de tweede term van het rechterlid gelijk aan het verschil van de potentiaalfuncties $\varphi(r, z)$ en $\varphi_0(r, z)$ behorende bij de gevallen, waarin de bovenlaag een weerstand c_1 resp. een weerstand 0 heeft (terwijl steeds $c_2 = \infty$). In het algemeen is evenwel c_1 groot en interesseren we ons meer voor het verschil van de potentiaalfuncties $\varphi(r, z)$ en $\varphi_1(r, z)$, wanneer $\varphi_1(r, z)$ de potentiaal voorstelt behorende bij het geval $c_1 = c_2 = \infty$ (en de zelfde waarden Q , D en ζ).

Nu geldt voor $c_1 = \infty$, dat $\sigma = \frac{D}{kc_1} = 0$. Zouden we nu in formule (20) de limietovergang $\sigma \rightarrow 0$ toepassen, dan treedt een (in het punt $\lambda = 0$) divergente integraal op. Dit bezwaar kan gemakkelijk overvaren worden door op te merken, dat een potentiaalfunctie slechts op een (van r en z onafhankelijke) constante na is bepaald. We mogen dus formule (20) vervangen door

$$(21) \quad \varphi(r, z) = \varphi_0(r, z) - \frac{Q}{2k\pi D} \int_0^\infty \frac{\cosh \frac{\lambda \zeta}{D}}{\cosh \lambda} \frac{\cosh \frac{\lambda z}{D} J_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right) - 1}{\sinh \lambda + \frac{\zeta}{D} \cosh \lambda} d\lambda,$$

en uit de limietovergang $\tau \rightarrow 0$ volgt nu

$$(22) \quad \varphi_1(r, z) = \varphi_0(r, z) - \frac{Q}{2k\pi D} \int_0^\infty \frac{\cosh \frac{\lambda \zeta}{D}}{\cosh \lambda} \frac{\cosh \frac{\lambda z}{D} J_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right) - 1}{\sinh \lambda} d\lambda,$$

waarin de voorkomende integraal wel convergeert. Door de formules (21) en (22) van elkaar af te trekken vinden we

$$(23) \quad \varphi(r, z) - \varphi_1(r, z) = \frac{Q}{2k\pi D} \int_0^\infty \frac{\cosh \frac{\lambda \zeta}{D} \left[\cosh \frac{\lambda z}{D} J_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right) - 1 \right] d\lambda}{\sinh \lambda \left[\frac{\zeta}{D} \sinh \lambda + \cosh \lambda \right]}.$$

Voor de in (23) voorkomende functie $\varphi_1(r, z)$ volgt uit (14), (10), (11), (12) en (13)

$$(24) \quad \varphi_1(r, z) = -\frac{Q}{4k\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\zeta + z)^2}} \right] \\ + \frac{Q}{8k\pi D} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{4D}\right)^{2m} \frac{(-1)^m}{m! m!} \left[\Psi^{(2m)}\left(\frac{\zeta - z}{2D}\right) + \Psi^{(2m)}\left(\frac{-\zeta + z}{2D}\right) + \right. \\ \left. \Psi^{(2m)}\left(\frac{\zeta + z}{2D}\right) + \Psi^{(2m)}\left(\frac{-\zeta - z}{2D}\right) \right]$$

en wel is de in het rechterlid voorkomende reeks convergent voor $r < 2D - \zeta - z$. Een analoge ontwikkeling vindt men voor de functie $\varphi(r, z) - \varphi_1(r, z)$ wanneer men de in (23) voorkomende Besselfunctie door zijn reeksontwikkeling vervangt:

$$J_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! m!} \left(\frac{\lambda r}{2D}\right)^{2m}$$

Dan volgt nl.

$$(25) \quad \varphi(r, z) - \varphi_1(r, z) = \frac{Q}{2k\pi D} \int_0^\infty \frac{\cosh \frac{\lambda \zeta}{D} \left[\cosh \frac{\lambda z}{D} - 1 \right] d\lambda}{\sinh \lambda \left[\frac{\lambda}{D} \sinh \lambda + \cosh \lambda \right]} \\ + \frac{Q}{2k\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2D}\right)^{2m} \frac{(-1)^m}{m! m!} \int_0^\infty \frac{\cosh \frac{\lambda \zeta}{D} \cosh \frac{\lambda z}{D} \lambda^{2m} d\lambda}{\sinh \lambda \left[\frac{\lambda}{D} \sinh \lambda + \cosh \lambda \right]}.$$

Ook van de in (25) voorkomende reeks kan men bewijzen, dat zij convergeert voor $r < 2D - \zeta - z$. De formules (23) en (24) resp. (25) en (24) stellen ons (althans in principe) in staat de potentiaal $\varphi(r, z)$ (voor het geval $c_2 = \infty$ en c_1 willekeurig) te berekenen in de buurt van de bronas.

We nemen weer aan, dat de basis $z = 0$ ondoorlaatbaar is, d.w.z. $c_2 = \infty$. Verder is de weerstand c_1 van de bovenste kleilaag in het algemeen groot (b.v. $c_1 = 3500$) en het vermoeden ligt dus voor de hand, dat in de omgeving van de bronas het stromingsbeeld weinig verandert, wanneer we deze bovenlaag door een ondoorlaatbare kleilaag vervangen.

Ondermeer zal de verticale snelheidscomponent

$$v = -k \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

weinig afwijken van de overeenkomstige component

$$v_1 = -k \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$$

behorende bij het geval $c_1 = c_2 = \infty$, tenzij $2D - z - \zeta$ zeer klein is. Voor dit verschil

$$V(r, z) = v(r, z) - v_1(r, z)$$

geldt wegens (23)

$$(26) \quad V(r, z) = - \frac{Q}{2\pi D^2} \frac{\cosh \frac{\lambda \zeta}{D} \sinh \frac{\lambda z}{D} J_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right) \lambda d\lambda}{\sinh \lambda \left[\frac{\lambda}{\sigma} \sinh \lambda + \cosh \lambda \right]}.$$

We zullen nu een (zeer ruwe) bovengrens afleiden voor de in (26) voorkomende integraal, ten einde het vermoeden te onderzoeken, dat $V(r, z)$ klein is.

Ter verkorting stellen we

$$(27) \quad p = \frac{z}{D} \quad \text{en} \quad q = \frac{\zeta}{D};$$

we merken op, dat zowel p als q in het interval $[0, 1]$ liggen. Formule (26) kan nu geschreven worden als

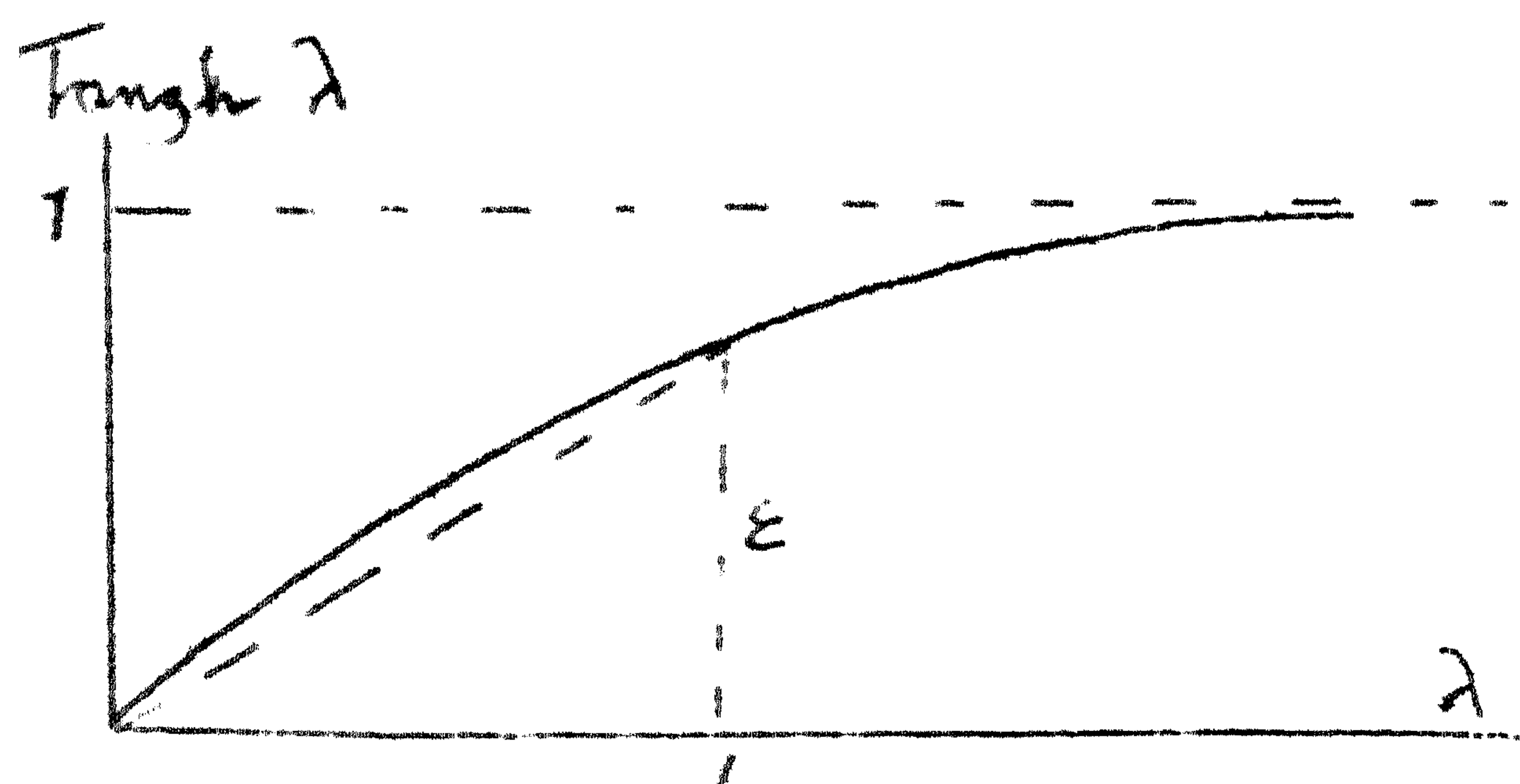
$$(28) \quad V(r, z) = - \frac{\sigma Q}{2\pi D^2} \int_0^\infty e^{-(2-p-q)\lambda} \frac{1-e^{-2p\lambda}}{1-e^{-2\lambda}} \frac{1+e^{-2q\lambda}}{1+e^{-2\lambda}} \frac{J_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right) \lambda d\lambda}{\lambda \tanh \lambda + \sigma}.$$

Uit de ongelijkheden

$$0 \leq \frac{1-e^{-2p\lambda}}{1-e^{-2\lambda}} \leq 1; \quad 0 \leq \frac{1+e^{-2q\lambda}}{1+e^{-2\lambda}} \leq 2; \quad -1 \leq J_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right) \leq +1,$$

en (28) volgt dus

$$(29) \quad |V(r, z)| \leq \frac{\sigma Q}{\pi D^2} \int_0^\infty e^{-(2-p-q)\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\lambda \tanh \lambda + \sigma}.$$



De functie

$$\text{Tangh } \lambda = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{1 + e^{-2\lambda}}$$

heeft het verloop, dat in nevenstaande figuur is weergegeven.

Stellen we $\varepsilon = \text{Tangh } 1$ dan geldt dus

$$\begin{cases} \text{voor } 0 \leq \lambda \leq 1 & \text{dat } \text{Tangh } \lambda \geq \lambda \varepsilon \\ \text{" } \lambda \geq 1 & \text{" } \text{Tangh } \lambda \geq \varepsilon \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$(30) \begin{cases} \text{voor } 0 \leq \lambda \leq 1 & \text{dat } \lambda \text{Tangh } \lambda + \sigma \geq \lambda^2 \varepsilon + \sigma \\ \text{" } \lambda \geq 1 & \text{" } \lambda \text{Tangh } \lambda + \sigma \geq \lambda \varepsilon. \end{cases}$$

Met (29) en (30) vinden we nu

$$|V(r, z)| \leq \frac{\sigma Q}{\pi D^2} \left[\int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 \varepsilon + \sigma} + \frac{1}{\varepsilon} \int_1^\infty e^{-(2-p-q)\lambda} d\lambda \right]$$

en dus

$$|V(r, z)| \leq \frac{\sigma Q}{\pi D^2} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon + \sigma}{\sigma} + \frac{e^{-(2-p-q)\lambda}}{2-p-q} \right].$$

Wegens $\varepsilon = \text{Tangh } 1 = 0,7616$, $\sigma = \frac{D}{kc_1}$ en (27) volgt tenslotte de ongelijkheid

$$(31) \quad |V(r, z)| \leq 0,209 \frac{Q}{kc_1 D} \left[\ln \left(1 + \frac{0,762 \, kc_1}{D} \right) + \frac{2D}{2D - z - \zeta} \right].$$

Als numerieke illustratie kiezen we het reeds vroeger beschouwde geval $Q = 250$, $D = 120$, $\zeta = 90$. Zij verder $k = 30$ en $c_1 = 3500$. Dan volgt uit (31) voor $0 \leq z \leq \zeta = 90$

$$|V(r, z)| \leq 0,415 \cdot 10^{-5} \left[6,50 + \frac{240}{60} \right] = 4,36 \cdot 10^{-5}.$$

Zouden we dus in het beschouwde geval formule (24) hebben toegepast voor de berekening van het snelheidsveld (welke formule alleen exact geldt als $c_1 = c_2 = \infty$), dan is de gemaakte fout in de verticale component van de snelheid ten hoogste $4 \cdot 10^{-5}$ (en in werkelijkheid veel kleiner, daar formule (31) slechts een ruwe bovengrens geeft). Voor $20 \leq z \leq 90$ is $v_1(0, z) \geq 0,003$ (v.g.l. de eerste kolom van de tabel op blz. 6) en is dus de afwijking van $v(0, z)$ ten hoogste 1%.

Dit numerieke voorbeeld bevestigt dus ons vermoeden, dat men, voor de berekening van het snelheidsveld in de buurt van de put en bij grote weerstand c_1 , zonder bezwaar $c_1 = \infty$ mag stellen, d.w.z. men mag de formules (6) of (24) toepassen.

Literatuur:

- G.J. de Glee, Over grondwaterstromingen bij wateronttrekking door middel van putten., Thesis 1930.
- E. Jahnke and F. Emde, Tables of functions, 4th ed. (1933), New York 1945.
- M. Muskat, The flow of homogeneous fluids through porous media, 1st ed. (1937), Michigan 1946.
- G.N. Watson, A treatise on the theory of Besselfunctions, 2nd ed.. (1941), Cambridge 1944.

APPENDIX I.

Een homogeen horizontaal zandpakket (doorlatendheid k) wordt aan weerszijden begrensd door twee horizontale homogene kleilagen $z = 0$ en $z = D$ met weerstanden c_2 resp. c_1 . In het punt P van de z -as, op een hoogte ξ boven de basislaag $z = 0$, bevindt zich een put ter sterkte Q . Gevraagd wordt te bewijzen, dat voor de resulterende potentiaal formule (2) (zie tekst) geldt.

Vooreerst moet deze potentiaal $\varphi(r, z)$ voldoen aan de continuïteitsvergelijking

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

in elk van P verschillend punt (r, z) van het zandpakket. Verder gelden de randvoorwaarden

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{kc_2} \varphi = 0 \quad \text{als } z = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{kc_1} \varphi = 0 \quad " \quad z = D,$$

aannemende, dat buiten de kleilagen de zoetwaterpotentiaal nul is. Tenslotte moet $\varphi(r, z)$ in het punt $(0, \xi)$ een singulariteit hebben van de vorm

$$- \frac{Q}{4k\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \xi)^2}}.$$

Men kan bewijzen, dat er precies één begrensde functie $\varphi(r, z)$ is, welke aan genoemde voorwaarden voldoet.

Beschouw nu een cilindervormige buis met straal a en lengte D ; deze buis wordt in het zandpakket zodanig opgesteld, dat zijn rotatieas met de z -as samenvalt.

We veronderstellen verder, dat

1. De stukken $0 \leq z \leq \xi - \frac{1}{2} h$ en $\xi + \frac{1}{2} h \leq z \leq D$ ($h > 0$) van deze buis geen water doorlaten.
2. Het gedeelte $\xi - \frac{1}{2} h \leq z \leq \xi + \frac{1}{2} h$ van de buis geperforeerd is.
3. Door het geperforeerde gedeelte per oppervlakte-eenheid een hoeveelheid water

$$\frac{Q}{2\pi ah}$$

per tijdseenheid naar binnen wordt gezogen.

Zij $\psi(r, z)$ (de van a en h afhankelijke) potentiaal van het resulterende stromingsbeeld. Het is duidelijk, dat

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} \psi(r, z) = \varphi(r, z) .$$

We zullen nu allereerst de functie $\psi(r, z)$ aangeven. Deze voldoet voor $r \geq a$ aan (1), (2) en (3). Verder hebben we voor $r = a$

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= 0 & \text{als } 0 \leq z \leq S - \frac{1}{2} h \text{ of } S + \frac{1}{2} h \leq z \leq D. \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{Q}{2\pi a h k} & \text{als } S - \frac{1}{2} h \leq z \leq S + \frac{1}{2} h. \end{aligned}$$

De functie $K_0(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 K_0(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dK_0(x)}{dx} = K_0(x) .$$

Voor elke keuze van de reële constanten μ en θ is dus de functie

$$K_0(\mu r) \cos(\mu z - \theta)$$

een oplossing van de differentiaalvergelijking (1). We trachten nu μ en θ zodanig te bepalen, dat bovendien aan de randvoorwaarden (2) en (3) wordt voldaan. Dit is dan en alleen dan het geval, wanneer

$$\mu \sin \theta - \frac{1}{kc_2} \cos \theta = 0$$

en

$$-\mu \sin(\mu D - \theta) + \frac{1}{kc_1} \cos(\mu D - \theta) = 0$$

Dit geeft

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{kc_2 \mu}$$

en

$$\frac{1}{kc_1 \mu} = \operatorname{tg}(\mu D - \theta) = \frac{\operatorname{tg} D - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \mu D \operatorname{tg} \theta}$$

Dus

$$\operatorname{tg} \mu D = \frac{\frac{1}{kc_1 \mu} + \operatorname{tg} \theta}{1 - \frac{1}{kc_1 \mu} \operatorname{tg} \theta} = \frac{\frac{1}{kc_1 \mu} + \frac{1}{kc_2 \mu}}{1 - \frac{1}{kc_1 \mu} \frac{1}{kc_2 \mu}} .$$

Stellen we

$$\sigma = \frac{D}{kc_1} \quad \text{en} \quad \tau = \frac{D}{kc_2}$$

en $\lambda = \mu D$, dan volgt :

$$(6) \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\sqrt{\tau}}{\lambda - \frac{\sigma\tau}{\lambda}}.$$

Men kan bewijzen, dat alle oplossingen λ van (6) reëel zijn. Wanneer λ_n een willekeurige wortel is van de transcendente vergelijking (7), wanneer verder $\mu_n = \lambda_n D$ en

$$\operatorname{tg} \theta_n = \frac{1}{kc_2 \mu_n},$$

dan voldoet dus de functie

$$K_0(\mu_n r) \cos(\mu_n z - \theta_n)$$

aan de differentiaalvergelijking (1) en aan de randvoorwaarden (2) en (3). Opdat deze functie reëel is voor $r > 0$ moeten we eisen $\mu_n > 0$; verder nemen we aan, dat $0 \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}$.

We trachten nu de reële constanten $c_0, c_1, \dots$ zodanig te bepalen dat de functie

$$(7) \quad \psi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n K_0(\mu_n r) \cos(\mu_n z - \theta_n),$$

welke reeds de voorwaarden (1), (2) en (3) vervult, bovendien voldoet aan de voor $r = a$ geldende randvoorwaarde (5). Hierbij doorloopt

$\lambda_n = \frac{\mu_n}{D}$ alle positieve wortels van de transcendente vergelijking (6).

Wegens

$$\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$$

is voor de functie (7) voorwaarde (5) equivalent met

$$(8) \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(\mu_n z - \theta_n) &= 0 \text{ als } 0 \leq z \leq S - \frac{1}{2} h, \\ &= 0 \text{ als } S + \frac{1}{2} h \leq z \leq D, \\ &= \frac{Q}{2\pi h k} \text{ als } S - \frac{1}{2} h \leq z \leq S + \frac{1}{2} h, \end{aligned}$$

waarin

$$(9) \quad d_n = -c_n a \mu_n K_1(\mu_n a).$$

Men bewijst gemakkelijk, dat

$$\int_0^D \cos(\mu_n z - \theta_n) \cos(\mu_m z - \theta_m) dz = 0 \quad \text{als } \mu_n \neq \mu_m$$

en uit (8) volgt dus

$$(10) \quad d_n = \int_0^D \cos^2 (\mu_n z - \theta_n) dz = \frac{Q}{2\pi k h} \int_{\rho - \frac{1}{2}h}^{\rho + \frac{1}{2}h} \cos(\mu_n z - \theta_n) dz,$$

waarmee d_n en c_n en wegens (7) dus ook $\varphi(r, z)$ bekend zijn.

Stellen we

$$\frac{1}{A_n} = \int_0^D \cos^2 (\mu_n z - \theta_n) dz$$

dan volgt uit (10)

$$(11) \quad \lim_{h \rightarrow 0} d_n = \frac{Q}{2\pi k} A_n \cos (\mu_n \rho - \theta_n)$$

Verder geldt wegens

$$\lim_{x \rightarrow 0} x K_1(x) = 1$$

en (9), dat

$$\lim_{a \rightarrow 0} c_n = - d_n$$

en dus hebben we in verband met (11):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} c_n = - \frac{Q}{2\pi k} A_n \cos (\mu_n \rho - \theta_n).$$

Wegens (7) en (4) vinden we tenslotte

$$(12) \quad \varphi(r, z) = - \frac{Q}{2\pi k} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\mu_n \rho - \theta_n) \cos(\mu_n z - \theta_n) K_0(\mu_n r),$$

welke oplossing inderdaad aan alle gestelde voorwaarden blijkt te voldoen.

Opm. In het bijzondere geval $c_1 = c_2 = \infty$ voldoet ook de functie $\log r$ aan (1), (2) en (3). Daardoor heeft de formule voor $\varphi(r, z)$ in dit geval een iets andere gedaante (zie formule (6) van tekst).

APPENDIX II.

In formule (2) (zie tekst) zijn de eigenwaarden μ_n van groot belang. We weten, dat $\lambda_n = \mu_n D$ een positieve wortel is van de transcendente vergelijking

$$(1) \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\sigma + \tau}{\lambda - \frac{\sigma\tau}{\lambda}},$$

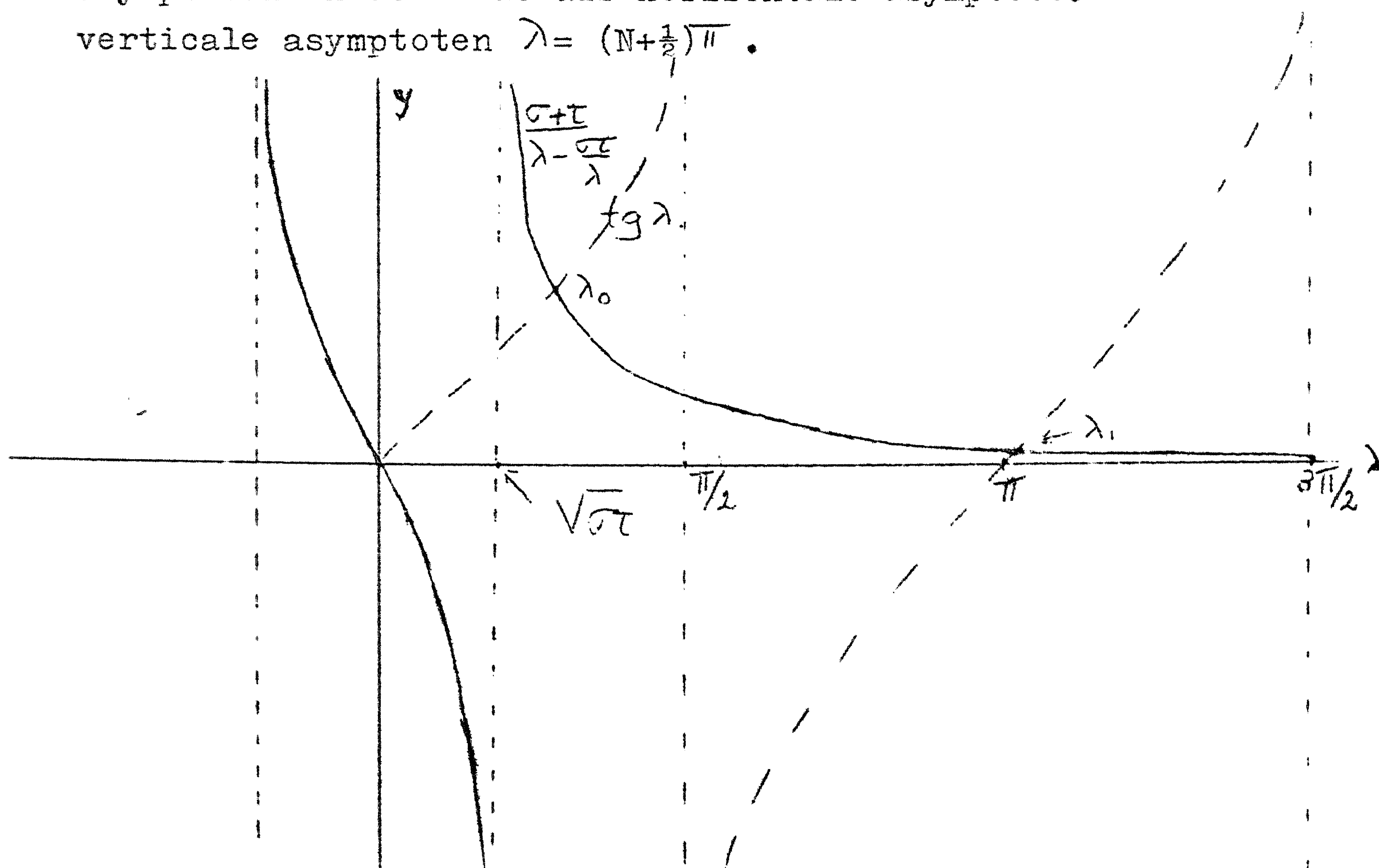
waarin $\sigma = \frac{D}{kc_1}$ en $\tau = \frac{D}{kc_2}$ kleine, niet-negatieve getallen zijn.

In deze appendix zullen we enkele praktisch bruikbare formules aangeven voor de wortels van deze vergelijking. Goede benaderingsformules zijn (18) en (23), waarin ξ resp. η door (3) resp. (4) wordt gedefinieerd.

De wortels van (1) corresponderen met de snijpunten van de krommen

$$Y = \frac{\sigma + \tau}{\lambda - \frac{\sigma\tau}{\lambda}} \quad \text{en} \quad Y = \operatorname{tg} \lambda$$

in het λ -Y-vlak. De eerste kromme heeft $\lambda = \pm \sqrt{\sigma\tau}$ als verticale asymptoten en de λ -as als horizontale asymptoot. De tweede heeft de verticale asymptoten $\lambda = (N + \frac{1}{2})\pi$.



Daar σ en τ klein zijn, geldt blijkbaar voor de positieve wortel van (1)

$$(2) \quad \lambda_n = n\pi + \varepsilon_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

waarin $\varepsilon_n > 0$ een kleine grootheid is.

Ter bekorting zullen we stellen

$$(3) \quad \xi = \sigma + \tau = \frac{D}{k} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)$$

en

$$(4) \quad \eta = \sigma\tau = \left[\frac{D}{k \sqrt{c_1 c_2}} \right]^2.$$

Wegens

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{D}{k} \cdot \frac{1}{c_1 + c_2} \leq \frac{D}{4k} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) = \frac{1}{4} \xi$$

hebben we

$$(5) \quad \eta \leq \frac{1}{4} \xi^2.$$

Vergelijking (1) wordt

$$(6) \quad (\lambda^2 - \eta) \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\lambda} = \xi.$$

We beweren, dat voor de wortels λ_n van (6) de volgende reeksontwikkelingen gelden

$$(7) \quad \lambda_0^2 = \sum_{i+k \geq 1} a_{i,k} \xi^i \eta^k$$

en

$$(8) \quad \lambda_n = n\pi + \sum_{i+k \geq 1} b_{i,k}^{(n)} \xi^i \eta^k$$

als $n \geq 1$. Deze bewering volgt onmiddellijk uit de volgende, bekende stelling uit de functietheorie.

Zij $f(\xi, \eta, z)$ een functie, welke in een zekere omgeving van het punt $(\xi, \eta, z) = (0, 0, z_0)$ oneindig vaak differentieerbaar is. Laat verder voldaan zijn aan

$$f(0, 0, z_0) = 0$$

en

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} f(\xi, \eta, z) \right]_{\xi=0, \eta=0, z=z_0} \neq 0.$$

Onder deze voorwaarden heeft de vergelijking $f(\xi, \eta, z) = 0$ een wortel, welke kan worden ontwikkeld in de machtreeks

$$z = z_0 + \sum_{i+k \geq 1} c_{i,k} \xi^i \eta^k,$$

welke voor $|\xi|$ en $|\eta|$ voldoende klein absoluut convergeert.

We zullen nu aangeven hoe men de in (7) en (8) voorkomende coëfficiënten kan berekenen.

We zullen gebruik maken van het feit, dat voor de met

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$$

($c_1 \neq 0$) inverse reeks

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} d_k y^k$$

de eerste coëfficiënten worden gegeven door

$$\begin{aligned} d_1 &= c_1^{-1} \\ d_2 &= -c_1^{-3} c_2 \\ (9) \quad d_3 &= 2 c_1^{-5} c_2^2 - c_1^{-4} c_3 \\ d_4 &= -5 c_1^{-7} c_2^3 + 5 c_1^{-6} c_2 c_3 - c_1^{-5} c_4 \\ &\text{---} \end{aligned}$$

Vooreerst beschouwen we de ontwikkeling (7). Aan vergelijking (6) wordt voldaan door $\lambda = \lambda_0$. Verder heeft het linkerlid van (6) het nulpunt $\lambda^2 = \eta$. Daar $\lambda_0^2 - \eta$ klein is, geldt dus de convergente ontwikkeling

$$(10) \quad \xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\lambda_0^2 - \eta)^k$$

met

$$(11) \quad c_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left\{ (x - \eta) \frac{\text{tg} \sqrt{x}}{x} \right\} \right]_{x=\eta}.$$

Verder merken we op, dat

$$(12) \quad \text{tg } x = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m x^{2m+1}$$

met

$$\alpha_m = \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!} (2^{4m+4} - 2^{2m+2}),$$

waarin

$$B_1 = \frac{1}{6}; \quad B_2 = \frac{1}{30}; \quad B_3 = \frac{1}{42}; \quad B_4 = \frac{1}{30}; \quad B_5 = \frac{5}{66}; \quad \dots$$

de getallen van Bernoulli voorstellen. Dus

$$(13) \quad \alpha_0 = 1; \alpha_1 = \frac{1}{3}; \alpha_2 = \frac{2}{15}; \alpha_3 = \frac{17}{315}; \alpha_4 = \frac{62}{2835}.$$

Uit (11) en (12) volgt na enige berekening

$$(14) \quad c_k = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} \alpha_{m+k-1} \eta^m$$

en dus in het bijzonder wegens (13)

$$(15) \quad \begin{aligned} c_1 &= 1 + \frac{1}{3}\eta + \frac{2}{15}\eta^2 + \frac{17}{315}\eta^3 + \frac{17}{2835}\eta^4 + \dots = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta}} \\ c_2 &= \frac{1}{3} + \frac{4}{15}\eta + \frac{17}{105}\eta^2 + \frac{248}{2835}\eta^3 + \dots \\ c_3 &= \frac{2}{15} + \frac{17}{105}\eta + \frac{124}{945}\eta^2 + \dots \\ c_4 &= \frac{17}{315} + \frac{248}{2835}\eta + \dots \end{aligned}$$

De coëfficiënten van de met (10) inverse reeks

$$(16) \quad \lambda_0^2 - \eta = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \zeta^k$$

worden door (9) gegeven. Wegens (15) hebben we dus

$$(17) \quad \begin{aligned} d_1 &= \sqrt{\eta} \operatorname{ctg} \eta = 1 - \frac{1}{3}\eta - \frac{1}{45}\eta^2 - \frac{2}{945}\eta^3 - \frac{1}{4725}\eta^4 - \dots \\ d_2 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\eta + \frac{1}{63}\eta^2 + \frac{2}{675}\eta^3 + \dots \\ d_3 &= \frac{4}{45} + \frac{139}{945}\eta - \frac{542}{4725}\eta^2 + \dots \\ d_4 &= -\frac{16}{945} + \dots \end{aligned}$$

Uit (16) en (17) vinden we de gezochte coëfficiënten uit de dubbelreeks (7). Wegens (5) zal de volgende formule λ_0^2 bepalen op een fout van de orde ζ^5 na.

$$(18) \quad \begin{aligned} \lambda_0^2 &= \eta + \zeta \left(1 - \frac{1}{3}\eta\right) + \zeta^2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\eta\right) + \frac{4}{45}\zeta^3 - \frac{16}{945}\eta^4 \\ \text{ofwel} \\ \lambda_0^2 &= \zeta - \frac{1}{3}\zeta^2 + \frac{4}{45}\zeta^3 - \frac{16}{945}\zeta^4 + \eta \left(1 - \frac{1}{3}\zeta + \frac{1}{15}\zeta^2\right). \end{aligned}$$

De eerste benadering $\lambda_0^2 \sim \zeta$ geeft wegens (3)

$$\lambda_0 \sim \sqrt{\frac{D}{kc_1} + \frac{D}{kc_2}}.$$

Tenslotte zullen we de in (8) voorkomende coëfficiënten $b_{i,k}^{(n)}$ bepalen. Analooch met (10) hebben we

$$(19) \quad \zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (\lambda_n - n\pi)^k$$

($n \geq 1$), waarin

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} \left\{ (\lambda^2 - \eta) \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\lambda} \right\} \right]_{\lambda=n\pi} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left\{ \frac{(n\pi+x)^2 - \eta}{n\pi+x} \operatorname{tg} x \right\} \right]_{x=0}. \end{aligned}$$

Wegens (12) en (13) is dus γ_k gelijk aan de coëfficiënt van x^k in de ontwikkeling van de functie

$$\left\{ n\pi + x - \eta \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{x}{(n\pi)^2} + \frac{x^2}{(n\pi)^3} - \dots \right) \right\} \left\{ x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \dots \right\},$$

zodat

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= n\pi - \frac{\eta}{n\pi} \\ (20) \quad \gamma_2 &= 1 + \frac{\eta}{(n\pi)^2} \\ \gamma_3 &= \frac{n\pi}{3} - \frac{1}{3} \frac{\eta}{n\pi} - \frac{\eta}{(n\pi)^3} \end{aligned}$$

De coëfficiënten van de met (19) inverse reeks

$$(21) \quad \lambda_n - n\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \zeta^k$$

worden gegeven door (9) (mits we c_k en d_k door γ_k resp. δ_k vervangen). Dus

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{n\pi}{(n\pi)^2 - \eta} \\ (22) \quad \delta_2 &= -n\pi \frac{(n\pi)^2 + \eta}{[(n\pi)^2 - \eta]^3} \\ \delta_3 &= 2n\pi \frac{[(n\pi)^2 + \eta]^2}{[(n\pi)^2 - \eta]^5} - \frac{n\pi}{3} \frac{(n\pi)^4 - \eta(n\pi)^2 - 3\eta}{[(n\pi)^2 - \eta]^4} \end{aligned}$$

Uit (21) en (22) kan men λ_n op een betrekkelijk eenvoudige wijze berekenen. Ontwikkelt men σ_k naar opklimmende machten van η , dan ontstaat uit (21) de dubbelreeks (8). Door de eerste termen in deze reeks te beschouwen ontstaat de volgende benaderingsformule

$$(23) \quad \lambda_n = n\pi + \frac{\zeta}{n\pi} - \frac{\zeta^2}{(n\pi)^3} + \zeta^3 \left(\frac{2}{(n\pi)^5} - \frac{1/3}{(n\pi)^3} \right) + \frac{\zeta^4 \eta}{(n\pi)^3}$$

en wel is de in het rechterlid gemaakte fout van de orde ζ^4 .

APPENDIX III.

Neem aan, dat zowel c_1 als c_2 één der waarden 0 of ∞ aanneemt.
Stel

$$\begin{aligned} \delta_i &= +1 & \text{als } c_i &= +\infty \\ &= -1 & \text{" } c_i &= -\infty \end{aligned} \quad (i = 1, 2)$$

en beschouw het veld in een oneindig homogeen zand, dat ontstaat door de volgende reeks putten en bronnen op de z -as.

1. Een put ter sterkte Q in de punten $4nD + \int$,
2. " " " " $\delta_1 Q$ " " " $(4n+2)D - \int$,
3. " " " " $\delta_2 Q$ " " " $4nD - \int$,
4. " " " " $\delta_1 \delta_2 Q$ " " " $(4n+2)D + \int$,

waarbij n de gehele getallen doorloopt. Voor $0 \leq z \leq D$ is het resulterende veld een potentiaalfunctie (d.w.z. voldoet aan $\Delta \varphi = 0$) met uitzondering van het punt $\int$ op de z -as, alwaar zich een put ter sterkte Q bevindt. Verder is het vlak $z = D$ (resp. $z = 0$) een potentiaalvlak of stroomvlak al naar gelang c_1 (resp. c_2) gelijk is aan 0 of ∞ . Voor $0 \leq z \leq D$ is dus het resulterende stromingsbeeld identiek met het gezochte stromingsbeeld van de put P tussen de kleilagen. De gezochte potentiaal $\varphi(r, z)$ (welke op een constante na bepaald is) wordt dus gegeven door

$$(1) \quad \varphi(r, z) = -\frac{Q}{4kH} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (4nD + \int - z)^2}} + \frac{\delta_1}{\sqrt{r^2 + (4nD + 2D - \int - z)^2}} \right. \\ \left. + \frac{\delta_2}{\sqrt{r^2 + (4nD - \int - z)^2}} + \frac{\delta_1 \delta_2}{\sqrt{r^2 + (4nD + 2D + \int - z)^2}} - \frac{(1 + \delta_1)(1 + \delta_2)C_n}{4D} \right]$$

De van r en z onafhankelijke constanten C_n dienen zodanig te worden gekozen, dat de reeks in het rechterlid van (1) convergeert. We kiezen

$$(2) \quad \begin{aligned} C_n &= \frac{1}{|n|} & \text{als } n \neq 0 \\ &= -2C & \text{" } n = 0; \end{aligned}$$

hierin zij $C = 0,5772\dots$ de constante van Euler.

Wanneer we stellen

$$(3) \quad A(\xi, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + (n+y)^2}} - C_n$$

en

$$(4) \quad R = \frac{r}{4D} \quad ; \quad \alpha = \int \frac{-z}{4D} \quad ; \quad \beta = \int \frac{+z}{4D} ,$$

dan kan (1) geschreven worden als ^{*})

$$(5) \quad \varphi(r, z) = - \frac{Q}{16k\eta D} \left[A(R, \alpha) + \delta_1 A(R, \frac{1}{2} - \beta) + \delta_2 A(R, \beta) + \delta_1 \delta_2 A(R, \frac{1}{2} + \alpha) \right].$$

De definitie (3) van $A(\xi, y)$ is wegens (2) equivalent met

$$(6) \quad A(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} - B(\xi, y) - B(\xi, -y)$$

als

$$(7) \quad B(\xi, y) = -C + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + (n+y)^2}} \right].$$

Nu volgt met behulp van de rest-stelling van Lagrange

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + (n+y)^2}} = \sum_{m=0}^{N-1} c_m \frac{\xi^{2m}}{(n+y)^{2m+1}} + \Theta c_N \frac{\xi^{2N}}{(n+y)^{2N+1}} ;$$

hierin is N een willekeurig natuurlijk getal, Θ een (van N , ξ en $n+y$ afhankelijk) reëel getal ≥ 0 en ≤ 1 en

$$(8) \quad c_m = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2m-1}{2m}$$

($c_0 = 1$). Dus geeft (7)

$$(9) \quad B(\xi, y) = -C + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} \right] - \sum_{m=1}^{N-1} c_m \xi^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+y)^{2m+1}} + R_N$$

met

$$(10) \quad R_N = -\Theta c_N \xi^{2N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+y)^{2N+1}}$$

($0 \leq \Theta \leq 1$):

Voor de functie $\Psi(y) = \frac{d}{dy} \ln \Gamma(y+1)$ geldt

$$\Psi(y) = -C + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} \right]$$

en

$$\psi^{(2m)}(y) = -(2m)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+y)^{2m+1}} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

^{*}) Wanneer $c_1 = c_2 = \infty$ (resp. $c_1 = c_2 = 0$), dan geldt $\delta_1 = \delta_2 = 1$ (resp. $\delta_1 = \delta_2 = -1$) en kan (5) worden vereenvoudigd tot twee termen wegens $A(\xi, y) = A(\xi, -y)$ en $A(\xi, y) + A(\xi, y + \frac{1}{2}) = 2 A(2\xi, 2y) + 4 \ln 2$.

Dus volgt uit (8) en (9)

$$(11) \quad B(\xi, y) = \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \frac{1}{m!m!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m} \psi^{(2m)}(y) + R_N.$$

We zullen aannemen, dat $y > -1$. Dan volgt uit (10)

$$|R_N| \leq |c_N| \xi^{2N} \left[\frac{1}{(1+y)^{2N+1}} + \int_{3/2}^{\infty} \frac{du}{(u+y)^{2N+1}} \right]$$

en dus wegens $|c_N| < \frac{1}{\sqrt{N+1}}$, dat

$$|R_N| < \frac{\xi^{2N}}{\sqrt{N+1}} \left[\frac{1}{(1+y)^{2N+1}} + \frac{1}{2N} \frac{1}{(\frac{3}{2}+y)^{2N+1}} \right].$$

Voor $|\xi| \leq 1+y$ geldt dus $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$ ofwel

$$(12) \quad B(\xi, y) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!m!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m} \psi^{(2m)}(y).$$

De grootheden y , welke optreden bij de berekening van $\varphi(r, z)$ met behulp van (5), (6) en (12) (en wel $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm(\frac{1}{2}-\beta)$, $\pm(\frac{1}{2}+\alpha)$) zijn steeds $> -\frac{3}{4}$ en deze berekening is dus bruikbaar voor

$$R = \frac{r}{4D} \leq 1 - \frac{3}{4} \quad \text{d.w.z. voor } r \leq D.$$

APPENDIX IV.

In deze appendix zullen we de (in de tekst voorkomende) formule (17) bewijzen. De hierin optredende functie $\varphi(r, z)$ voldoet aan

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{als } 0 \leq z \leq D,$$

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{kc_2} \varphi = 0 \quad \text{als } z = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{kc_1} \varphi = 0 \quad \text{als } z = D$$

en heeft verder in het punt $(0, \rho)$ een singulariteit van de vorm

$$(4) \quad - \frac{Q}{4k\eta} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \rho)^2}}.$$

Verder voldoet de voorkomende functie $\varphi_0(r, z)$ aan (1), aan

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0 \quad \text{als } z = 0,$$

$$(6) \quad \varphi_0 = 0 \quad \text{als } z = D,$$

en verder heeft $\varphi_0(r, z)$ eveneens een singulariteit van de vorm (4) in het punt $(0, \rho)$.

Hieruit volgt, dat de functie

$$(7) \quad \psi(r, z) = \varphi(r, z) - \varphi_0(r, z)$$

in de strook $0 \leq z \leq D$ geen singulariteiten heeft, en aldaar weer aan (1) voldoet. Verder geldt wegens (2) en (5)

$$(8) \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{kc_2} \psi = \frac{1}{kc_2} \varphi_0(r, 0) \quad \text{als } z = 0$$

$$(9) \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{kc_1} \psi = - \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=D} \quad \text{als } z = D.$$

De functie $\psi(r, z)$ wordt door bovengenoemde eigenschappen eenduidig bepaald. We merken nog op, dat, wegens formule (2) (uit de tekst), voor $\varphi_0(r, z)$ de volgende reeksontwikkeling geldt

$$(10) \quad \varphi_0(r, z) = - \frac{Q}{4kD} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2D}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi r}{2D}\right) K_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{2D}\right)$$

Wanneer $J_0(x)$ de gewone Besselfunctie voorstelt (van de eerste soort en van de orde nul), dan voldoet wegens

$$\frac{d^2 J_0(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_0(x)}{dx} + J_0(x) = 0$$

de functie

$$\text{Cosh } \lambda z J_0(\lambda r) \quad \text{resp.} \quad \text{Sinh } \lambda z J_0(\lambda r)$$

aan de differentiaalvergelijking (1) voor elke keuze van de constante λ . Daarom zullen we trachten de (overal reguliere) functie $\psi(r, z)$ voor te stellen door de integraal

$$(11) \quad \psi(r, z) = \int_0^\infty \{ A(\lambda) \text{Cosh } \lambda z + B(\lambda) \text{Sinh } \lambda z \} J_0(\lambda r) d\lambda$$

en wel door een geschikte keuze van de functies $A(\lambda)$ en $B(\lambda)$. A priori weten we, dat een door (11) gedefinieerde functie steeds aan (1) voldoet (mits differentiatie "onder het integraalteken" is toegestaan).

Wegens (8) en (9) moet gelden voor elke waarde $r > 0$

$$(12) \quad \int_0^\infty \left\{ -\frac{1}{kc_2} A(\lambda) + \lambda B(\lambda) \right\} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{kc_2} \varphi_0(r, 0)$$

en

$$(13) \quad \int_0^\infty \left[A(\lambda) \left\{ \lambda \text{Sinh } \lambda D + \frac{1}{kc_1} \text{Cosh } \lambda D \right\} + B(\lambda) \left\{ \lambda \text{Cosh } \lambda D + \frac{1}{kc_1} \text{Sinh } \lambda D \right\} \right] J_0(\lambda r) d\lambda = - \frac{\partial \varphi_0(r, D)}{\partial z}$$

Nu volgt, onder zeer algemene voorwaarden, uit

$$h(r) = \int_0^\infty H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (r \geq 0)$$

dat

$$H(\lambda) = \lambda \int_0^\infty h(r) J_0(\lambda r) r dr \quad (\lambda \geq 0)$$

(zie WATSON, blz. 453). Uit (12) en (13) volgen dus de formules

$$(14) \quad A(\lambda) - kc_2 \lambda B(\lambda) = E(\lambda)$$

en

$$(15) \quad A(\lambda) \left\{ \lambda \text{Sinh } \lambda D + \frac{1}{kc_1} \text{Cosh } \lambda D \right\} + B(\lambda) \left\{ \lambda \text{Cosh } \lambda D + \frac{1}{kc_1} \text{Sinh } \lambda D \right\} = -E(\lambda),$$

waarin

$$(16) \quad E(\lambda) = -\lambda \int_0^\infty \varphi_0(r, 0) J_0(\lambda r) r dr,$$

en

$$(17) \quad F(\lambda) = +\lambda \int_0^\infty \frac{\partial \varphi_0(r, D)}{\partial z} J_0(\lambda r) r dr.$$

Met (14) en (15) kunnen we $A(\lambda)$ en $B(\lambda)$ uitdrukken in $E(\lambda)$ en $F(\lambda)$.

We zullen nu de functies $E(\lambda)$ en $F(\lambda)$ bepalen uit (16) en (17) door gebruik te maken van de reeksontwikkeling (10) voor $\varphi_0(r, z)$ en van de formule

$$(18) \quad \int_0^{\infty} K_0(ar) J_0(\lambda r) r dr = \frac{1}{a^2 + \lambda^2},$$

geldig voor $a > 0$ (zie WATSON, blz. 410). Uit (10) volgt

$$\varphi_0(r, 0) = -\frac{Q}{\pi k D} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2D} r\right) K_0\left(\frac{(2n+1)\pi}{2D} r\right)$$

en gebruik makend van (18) volgt uit (16) dus

$$(19) \quad E\left(\frac{\lambda}{D}\right) = \lambda \frac{Q}{\pi k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left((n+\frac{1}{2})\pi \frac{\xi}{D}\right)}{\lambda^2 + \left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]^2}.$$

Analoog volgt uit (17)

$$(20) \quad F\left(\frac{\lambda}{D}\right) = \lambda \frac{Q}{k D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]}{\lambda^2 + \left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]^2} \cos\left((n+\frac{1}{2})\pi \frac{\xi}{D}\right).$$

We merken op, dat $\xi = \int_D$ voldoet aan $0 \leq \xi \leq 1$.

Uit de theorie van de Fourieranalyse weten we, dat "elke" voor $0 \leq \xi \leq 1$ gedefinieerde functie $h(\xi)$ kan worden ontwikkeld in de reeks

$$h(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \cos\left((n+\frac{1}{2})\pi \xi\right)$$

($0 \leq \xi \leq 1$), waarin

$$h_n = 2 \int_0^1 h(\xi) \cos\left((n+\frac{1}{2})\pi \xi\right) d\xi.$$

Passen we dit toe op de functie $\cosh \lambda \xi$ resp. $\sinh \lambda(1-\xi)$, dan volgt na enige berekening

$$\cosh \lambda \xi = 2 \cosh \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]}{\lambda^2 + \left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]^2} \cos\left((n+\frac{1}{2})\pi \xi\right)$$

en

$$\sinh \lambda(1-\xi) = 2 \sinh \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left((n+\frac{1}{2})\pi \xi\right)}{\lambda^2 + \left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]^2}$$

($0 \leq \xi \leq 1$). Uit (19) en (20) concluderen we tenslotte

$$(21) \quad E\left(\frac{\lambda}{D}\right) = \frac{Q}{2k\pi} \frac{\sinh \lambda(1-\frac{\xi}{D})}{\cosh \lambda},$$

en

$$(22) \quad F\left(\frac{\lambda}{D}\right) = \lambda \frac{Q}{2k\pi D} \frac{\cosh \lambda \frac{\xi}{D}}{\cosh \lambda}.$$

Nu $E(\lambda)$ en $F(\lambda)$ bekend zijn, kan men met (14) en (15) de functies $A(\lambda)$ en $B(\lambda)$ bepalen en is ook de integraalvoorstelling (11) bekend. Aldus vindt men na enige berekening, gebruik makend van (7),

$$(23) \quad \varphi(r, z) = \varphi_0(r, z) - \frac{Q}{2k\pi D} \int_0^\infty \frac{f(z, \xi, \lambda)}{g(\lambda)} J_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right) d\lambda,$$

waarin

$$f(z, \xi, \lambda) = \cosh \frac{\lambda \xi}{D} \left[\lambda \cosh \frac{\lambda z}{D} + \tau \sinh \frac{\lambda z}{D} \right] \\ - \sinh \lambda \left(1 - \frac{\xi}{D}\right) \left[\tau \cosh \lambda \left(1 - \frac{z}{D}\right) + \frac{\sigma \tau}{\lambda} \sinh \lambda \left(1 - \frac{z}{D}\right) \right]$$

en

$$g(\lambda) = \cosh \lambda \left[(\sigma + \tau) \cosh \lambda + \left(\lambda + \frac{\sigma \tau}{\lambda}\right) \sinh \lambda \right]$$

met

$$\sigma = \frac{D}{kc_1} \quad \text{en} \quad \tau = \frac{D}{kc_2}.$$

Men gaat gemakkelijk na, dat de in (23) voorkomende integraal convergeert voor $z + \xi < 2D$.

In zekere zin is de afleiding van (23) heuristisch. Immers, gedurende de afleiding waren de functies $A(\lambda)$ en $B(\lambda)$ onbekend, en kon dus niet worden nagegaan of de gebezigde manipulaties toelaatbaar zijn. Achteraf moeten we dus nagaan of de door (23) gedefinieerde functie $\varphi(r, z)$ aan alle gestelde voorwaarden (n.l. (1), (2), (3) en (4)) voldoet. Dit blijkt inderdaad het geval te zijn.

Het is mogelijk om uit formule (23) formule (2) uit de tekst terug te vinden. We zullen ons hierin beperken tot het geval $\tau = 0$ ($c_2 = \infty$). Dan gaat (23) over in

$$(24) \quad \varphi(r, z) = \varphi_0(r, z) - \frac{Q}{2k\pi D} \int_0^\infty \frac{\cosh \frac{\lambda \xi}{D} \cosh \frac{\lambda z}{D} J_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right)}{\cosh \lambda \left[\sinh \lambda + \frac{\sigma}{\lambda} \cosh \lambda \right]} d\lambda$$

Nu geldt voor $\xi > 0$

$$(25) \quad H_0^{(1)}(\xi) = J_0(\xi) + i N_0(\xi) \\ - H_0^{(1)}(\xi e^{i\pi}) = J_0''(\xi) - i N_0(\xi),$$

als $N_0(\xi)$ resp. $H_0^{(1)}(\xi)$ een Besselfunctie van de tweede soort resp. een Hankelfunctie van de eerste soort voorstelt.¹⁾ Dus kan (24) worden geschreven als

¹⁾ We beschouwen $H_0^{(1)}(\xi)$ alleen in het halfvlak $\text{Im}(\xi) \geq 0$. We nemen aan, dat voor $\xi > 0$ deze functie door (25) wordt gedefinieerd met $N_0(\xi)$ reëel.

- 29 -

$$(25) \quad \varphi(r, z) = \varphi_0(r, z) - \frac{Q}{4k\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \frac{\lambda z}{D} \cosh \frac{\lambda r}{D} H_0^{(1)}\left(\frac{\lambda r}{D}\right)}{\cosh \lambda \left[\sinh \lambda + \frac{\sigma}{\lambda} \cosh \lambda \right]} d\lambda$$

We transformeren nu (25) volgens $\lambda = i\lambda'$. Wegens

$$K_0(\xi) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(i\xi)$$

vinden we dan

$$(26) \quad \varphi(r, z) - \varphi_0(r, z) = \frac{Q}{k\pi D} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\cos \frac{\lambda z}{D} \cos \frac{\lambda r}{D} K_0\left(\frac{\lambda r}{D}\right)}{\cos \lambda \left[\sin \lambda - \frac{\sigma}{\lambda} \cos \lambda \right]} d\lambda.$$

Wegens

$$K_0(x) = O\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)$$

kan de integraal in (26) worden herleid tot een som van residuen bij de polen van de integrand. Deze polen zijn juist de nulpunten van de functie

$$\cos \lambda \left[\sin \lambda - \frac{\sigma}{\lambda} \cos \lambda \right]$$

En wel komen alleen de rechts van de imaginaire as gelegen nulpunten in aanmerking. Dit zijn vooreerst de punten

$$(27) \quad \lambda = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

en verder de positieve wortels

$$(28) \quad \lambda = \lambda_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

van de vergelijking

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sigma}{\lambda}.$$

Na enige berekening volgt nu uit (26)

$$(27) \quad \varphi(r, z) - \varphi_0(r, z) = \frac{Q}{k\pi D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{D} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi r}{D} K_0\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi r}{D}\right)}{1 + \frac{1}{\sigma} \sin^2 \lambda_n} - \frac{Q}{k\pi D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\lambda_n \frac{z}{D}\right) \cos\left(\lambda_n \frac{r}{D}\right) K_0\left(\lambda_n \frac{r}{D}\right)}{1 + \frac{1}{\sigma} \sin^2 \lambda_n}.$$

In verband met (10) vinden we tenslotte

$$\varphi(r, z) = - \frac{Q}{k\pi D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \mu_n \frac{z}{D} \cos \mu_n \frac{r}{D} K_0(\mu_n r)}{1 + \frac{1}{\sigma} \sin^2 \mu_n D},$$

als $\lambda_n = \mu_n D$. Dat is juist formule (2) van de tekst, daar voor $\tau = 0$ geldt $\theta_n = 0$ en

$$\frac{1}{A_n} = \int_0^D \cos^2 \mu_n z dz = \frac{1}{2} D + \frac{\sin 2 \mu_n D}{4 \mu_n} = \frac{1}{2} D \left[1 + \frac{1}{\sqrt{}} \sin^2 \mu_n D \right].$$